**DERIVADAS**

O estudo das derivadas objetiva definir e interpretar geométrica a derivada, aplicar as regras de derivação para a resolução de problemas, utilizar a Regra de L’Hopital-Bernoulli na resolução de limites indeterminados e encontrar pontos de Máximos, de Mínimos e de Inflexão de funções.

**Introdução**

Para iniciar os estudos sobre Derivadas vamos, inicialmente, observar o exemplo a seguir que ilustra a sua aplicação na Física, dentre tantas outras aplicações práticas que iremos abordar.

Um veículo, em movimento, obedece à seguinte função: s(t) = 3t2 + 5t+ 3 (s- em quilômetros e t- em horas). No instante t = 4 horas, determine a velocidade e a aceleração do veículo.

Quando temos o espaço percorrido por um veículo representado por uma função, devemos calcular inicialmente a derivada primeira (função velocidade), em seguida, substituir o valor do período dado no problema. O resultado alcançado representa a velocidade do móvel nesse período.

s(t) = 3t2 + 5t+ 3

s’(t) = 6t + 5

s’(4) = 6.4 + 5

s’(4) = 29

Esse resultado significa que a velocidade do móvel no instante dado é de 29 km/h.

Para encontrar a função aceleração, devemos calcular a derivada segunda da função do espaço.

s(t) = 3t2 + 5t+ 3

s’(t) = 6t + 5

s”(t) = 6

s”(4) = 6

Esse resultado significa que a aceleração do móvel no instante dado é de 6 km/h2

Em síntese, ao calcular a primeira derivada da função do espaço, encontramos a função velocidade e, ao determinar a segunda, temos a função aceleração.

Após esta introdução, vamos dá início aos estudos sobre Derivadas.

1. Taxa Média de Variação de uma Função (ou Declividade da Reta Secante): É a variação média sofrida pelos valores da função (y = f(x)) entre dois pontos quando o valor da variável independente x1, passa para x2 = x1+, cujo valor é obtido pelo quociente **.**

Observe o gráfico:

f(x2)

Δy **Δy = f(x2) - f(x1)**

f(x1)

Δx

0 x1 x2 x

**Exemplo:**

1- Calcular/interpretar a Taxa Média de Variação de cada função entre os pontos indicados:

a) f(x) = 3 1 e 2 b) f(x) = x 2 e 4 c)f(x) = -x + 1 2 e 5

**Solução**

a) f(x) = 3 1 e 2



****

No intervalo [1,2] a função é constante, isto é, para cada unidade acrescida a x, a função f(x) não se altera.

y

3

0 1 2 x

b) f(x) = x 2 e 4



****

No intervalo [2,4], para cada unidade acrescida a x, a função f(x) cresce em média uma unidade.

y

4

2

0 2 4 x

c) f(x) = -x + 1 2 e 5



****

No intervalo [2,5], para cada unidade acrescida a x, a função decresce em média uma unidade.

y

1

1 2 5 x

-1

-4

2- Calcular/interpretar a Taxa Média de Variação da função f(x) = x2, que tem como gráfico uma parábola que passa pela origem dos eixos cartesianos, entre os pontos 1 e 2, inclusive.

f(x) = x2 e [1, 2]



****

Esse resultado significa que, se a variável independente x variar de uma unidade, a função f(x) será três vezes maior (Δy = 3, enquanto Δx = 1).

y

4

1

0 1 2 x

2- Taxa de Variação Instantânea (ou Declividade da Reta Tangente):É o limite da Taxa Média de Variação da Função  quando → 0.

****

Nota: É relevante observar que a taxa média de variação de uma função é determinada num intervalo [x1, x1+Δx] e a taxa de variação instantânea é calculada em um ponto (x1, f(x1)).

**Aplicações:**

01- função C(q) = 4q + 54 representa a função custo, em reais, associada à produção de q unidades de certo produto. Determine:

1. O custo médio da produção.
2. O custo variável médio, ou seja, a taxa média de variação da função custo entre os pontos 0 e q unidades.

**Solução:**

Cm(q) = 

Cvm(q) = 

02- A equação q = -p + 9 representa a demanda de um determinado bem, onde **q** representa a quantidade demandada e **p** o preço do bem, encontre:

a) a receita total em função da quantidade demandada;

b) a receita média em função da quantidade demandada;

c) a taxa média de variação da função receita para as **q** primeiras unidades.

**Solução**

a) q = -p + 9 ⇒ p = -q + 9

- A receita total em função da demanda é o produto do preço pela quantidade demandada.

Rt(q)

Rt(q) = 

b) Rm(q) = 

c) Rvm(q) = 

Rvm(q) = 

**3- DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO:**

**- Definição:**

Seja a função y = f(x) representada pelo gráfico.

y

f(x) f(x2) P2

Δy

P1

f(x1) Δx

x1 x2 x

A derivada de y, em relação a x, é o limite do quociente da variação Δy [f(x2 – f(x1)] da função pelo acréscimo correspondente Δx (x2 – x1) da variável, quando Δx tende para zero:



O domínio da derivada de f(x) é o conjunto dos reais desde que o limite exista.

Assim, a derivada de uma função é o limite, caso exista, que fornece o valor da declividade da reta tangente ao gráfico de y = f(x) em qualquer ponto (x, y) que, por sua vez, representa a taxa de variação dessa função num ponto indicado (velocidade instantânea).

A derivada de uma função no ponto x apresenta as seguintes notações:

****

# 4- REGRA GERAL PARA O CÁLCULO DAS DERIVADAS

Para derivar uma função através da regra geral, devemos utilizar os seguintes passos:

1º) Substitui-se x por x + Δx e determina-se o valor da nova função y + Δy.

2º) Subtrai-se o valor da função do novo valor encontrado, achando-se Δy.

3º) Divide-se Δy por Δx.

4º) Determina-se o limite do quociente Δy/Δx, quando Δx tende para zero (Taxa de Variação Instantânea)que, pela definição, equivale a 1ª derivada, logo,

 = y’ = f’(x) = 

**Exemplo**

01- Derivar y = 3x2 aplicando a regra geral (definição):

**Solução**

**a) y = 3x2**

1º passo:

y = 3x2

y + Δx = 3(x + Δx)2

y + Δy = 3[x2 + 2xΔx + (Δx)2]

y + Δy = 3x2 + 6xΔx + 3(Δx)2

2º passo:

y + Δy –y = 3x2 + 6xΔx + 3(Δx)2 – 3x2

Δy = 6xΔx + 3(Δx)2

3º passo:



4º passo:



y

y=3x2

y2 p` sec

tg

y1 p”

x1 x2  x

## 5- INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

- Seja y = f(x) uma função representada pelo gráfico:

. y=f(x)

x

Vamos escolher um ponto qualquer P1(x1, y1) e, através dele, traçar uma tangente à curva.

y

tg

y1 P1

x1 x

Dando a variável independente **x** um acréscimo **Δx,** verificamos que a função **y** (ordenada) também sofre um acréscimo **Δy**, aparecendo, em seguida, o ponto P2. Através dos pontos P1 e P2 tracemos uma secante.

y=f(x) **Sec** P2

y2 P2

Δy **Tg** Δy

y P1 α α

θ Δx A P1 Δx A

x1 x2 x

Preste atenção no triângulo retângulo P1ÂP2, formado no gráfico. Pela relação métrica no triângulo retângulo, podemos afirmar que:

 . Como P2A = Δy e P1A = Δx, então \*

\* Tgα é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico que representa geometricamente a taxa de variação média.

Observe que, quando Δx tender para zero, o ponto P2 tende a se confundir com o ponto P1, ou seja, a secante passa ser a tangente à curva no ponto P1 formando com o eixo dos x um ângulo θ.

y=f(x) **Sec**

y2 P2

**Δy****Tg**

y1 P1 A

**Δx**

x1 x2 x

y=f(x)

**Tg = Sec**

y1 P1

θ

x1  x

Logo,  (coeficiente angular da reta tangente)

Exercícios de fixação de introdução à Derivada

1) Calcule da derivada , pela definição

a) f(x) =

b) f(x) =5x – 3

c) f(x) =

d) f(x) =

e) f(x) = 3x – 1

g) f(x) =

h) f(x) =

i) f(x) = -3x

2) Para cada função f(x), determine a derivada no ponto indicado:

a) f(x) = para x = 2

b) f(x) = 2x + 3 para x = 3

c) f(x) = - 3x para x = 1

d) f(x) = para x = 2

e) f(x) = para x = 0

f) f(x) = para x = 6